Département Mathématiques

3 eme Année Option IFI

Calibration et la couverture des produits dérivés

TP4 Calibration du modèle de Heston

Partie I: Modèle de Heston

L'une des critiques de la théorie de Black et Scholes qui revient souvent est le fait que ces théories sont fondées sur la distribution normale, qui sous-estime très fortement les événements " improbables " comme les crises alors qu'ils sont finalement beaucoup moins rares que cette loi ne le prévoit. Toutefois, il est facile de corriger ce problème par la prise en compte d'une volatilité adaptée.

Pour pouvoir palier aux limites de Black et Scholes, les acteurs du marchés ont vu utile d'utiliser une volatilité implicite (obtenue à partir des prix des options listés sur le marché). Heston a proposé d'utiliser un modèle ou la volatilité devient un élément stochastique qui suit une certaine dynamique. Ce modèle présuppose que la volatilité de l'actif n'est pas constante, ni même déterministe, mais suit un processus aléatoire.

Le but de ce TP est de calculer, à l'aide des techniques de simulation de Monte-Carlo le prix le l'option Européenne Call dans le cadre du modèle de Heston, calibrer le modèle et de simuler la courbe de volatilité implicite avec le smile.

Introduisons deux mouvements Browniens indépendants B_t et Z_t. Les mouvements Browniens

$$B_t \quad et \quad W_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2} Z_t$$

sont correlés avec le coefficient de correlation ρ.

La volatilité et l'actif sous-jacent vérifient les équations stochastiques suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{v_t} dW_t \\ d\, v_t = k(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t} dB_t \\ < dW_t, dB_t >= \rho dt \end{cases}$$

- r : la tendance instantanée (déterministe) du stock
- k : la vitesse de retour à la moyenne
- θ: la variance à l'infinie
- η : la volatilité de la volatilité
- ρ : la corrélation des deux browniens W_t et B_t.

En effet il est possible de découvrir le sens des quelques paramètres.

A l'aide de lemme d'Ito on écrit la solution de l'équation pour la volatilité de la forme:

$$v_t = \theta + (v_0 - \theta)e^{-kt} + \eta \int_0^t e^{-k(t-s)} \sqrt{v_s} dB_s$$

On prend l'ésperance de chaque membre. On obtient

$$\mathbb{E}[v_t] = \theta + (v_0 - \theta)e^{-kt}$$

De plus

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[v_t] = \theta$$

Alors θ est la volatilité moyenne de volatilité stochastique dans l'état asymptotique.

Introduisons la fonction $\ln S_t$.

L'application de la lemme d'Ito permet d'obtenir:

$$d(\ln S_t) = (r - \frac{v_t}{2})dt + \sqrt{v_t}dW_t$$

soit

$$S_{t+dt} = S_t e^{(r-\frac{v_t}{2})dt+\sqrt{v_t}W_{\Delta t}}$$

Discrétisons l'intérvalle $[0, T]$. Donc on peut simuler à chaque instant t_i le prix de l'actif:

$$S_{i+1} = S_i e^{(r-\frac{v_i}{2})dt+\sqrt{v_i}W_{\Delta t}}$$

Le modèle de Heston présente des caractéristiques qui le distinguent des autres modèles de volatilité stochastique, à savoir:

- Il prend en compte une éventuelle corrélation entre le cours d'une action et sa volatilité.
- Il traduit la volatilité en revenant à la moyenne.
- Il n'exige pas que le cours des actions suive une distribution de probabilité log-normale.

Partie II: Simulation du modèle de Heston

La discrétisation d'Euler de l'équation pour la volatilité stochastique donne:

$$v_{i+1} = v_i + k(\theta - v_i)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}B_{\Delta t}$$

Dans la pratique la convergence de ce schema est très longue et nous allons utiliser ici le schema de Milstein:

$$v_{i+1} = v_i + k(\theta - v_i)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}B_{\Delta t} + \frac{\eta^2}{4}((B_{\Delta t})^2 - \Delta t)$$

On simule les S_i et v_i par les formules suivantes:

$$S_{i+1} = S_i e^{(r-\frac{v_i}{2})dt+\sqrt{v_i}(\rho\sqrt{\Delta t}N_1+\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t}N_2)}$$

$$v_{i+1} = v_i + k(\theta - v_i)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}N_1 + \frac{\eta^2}{4}\Delta t((N_1)^2 - 1)$$

Ici les nombres N_1 et N_2 sont indépendants et suivent la loi normale centrée réduite.

Travail à faire

1. Log return

Discrétisons l'intérvalle $[0, T]$, $\Delta t = \frac{T}{N}$. Chaque trajectoire contient N points temporels t_i.

On simule dans la même boucle des trajectoires completes de l'actif $\{S_i,\, i = 1 : N\}$ et des trajectoires completes de la volatilité $\{v_i,\, i = 1 : N\}$. On calcule S_{i+1} et v_{i+1} de façon itérative. Pour cela on utilise deux ensembles $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ des variables aléatoires $\mathbb{N}(0, 1)$ indépendants afin de simuler les coordonnées des mouvements Brouwnien indépendants B_i et Z_i.

$$N_1 \in \mathfrak{M}_1 \quad N_2 \in \mathfrak{M}_2,$$

$$S_{i+1} = S_i e^{(r-\frac{v_i}{2})dt+\sqrt{v_i}(\rho\sqrt{\Delta t}N_1^{(i)}+\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t}N_2^{(i)})}$$

$$v_{i+1} = v_i + k(\theta - v_i)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}N_1^{(i)} + \frac{\eta^2}{4}\Delta t((N_1^{(i)})^2 - 1)$$

1. Présenter 4 ou 5 courbes d'evolution de volatilité
2. Présenter 4 ou 5 courbes d'evolution de l'actif
3. Simuler N_{mc} fois Log return:

$$R = \ln(S(T)/S_0)$$

pour $\rho = 0, 0.9, -0.9$ et tracer la fonction de la densité de cette variable aléatoire R.

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} N_{mc} = 10000 \; ou \; 10000 \\ K = 1 \\ S_0 = 1 \\ T = 0.5 \\ r = 0.01 \\ k = 2 \\ \rho = 0, 0.9, -0.9 \\ \theta = 0.04 \\ \eta = 0.3 \\ v_0 = 0.04 \\ \Delta t = T/100 \\ x(i) = a + \Delta_x(i-1), \quad a = -1, x(i) \in [1, -1] \end{cases}$$

Observez que le modèle de Heston peut impliquer un certain nombre de distributions différentes de la normale ($\rho = 0$). ρ qui peut être interprétée comme la corrélation entre les log-retours et la volatilité de l'actif, affecte l'épaisseur des queues. Intuitivement, si $\rho > 0$, alors la volatilité augmente à mesure que le prix / rendement des actifs augmente. Cela étend la queue droite et serre la queue gauche de la distribution, créant une grosse distribution à droite. Inversement, si $\rho < 0$, la volatilité augmente lorsque le prix / rendement de l'actif diminue, étendant ainsi la queue gauche et serrant la queue droite de la distribution créant une grosse distribution à gauche Par conséquent, le coefficient ρ affecte l'asymétrie (skewness) de la distribution.

2. Calcule du prix du Call par Monte-Carlo
Le prix de l'option est donnée par la formule:

$$V(S_0,0)^{heston} = \mathbb{E}[max(S_T - K, 0)|S(0) = S_0]$$

- **Estimateur 1 de l'option:**

$$V(S_0,0)^{heston}_{estime1} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} max(S_T^{(n)} - K, 0)$$

Pour calculer la valeur finale de l'actif $S(T)$ on simule N_mc fois dans la même boucle des trajectoires completes de l'actif S_i et des trajectoires completes de la volatilité v_i.

$$N_1 \in \mathfrak{M}_1 \quad N_2 \in \mathfrak{M}_2,$$

$$S_{i+1} = S_i e^{(r-\frac{v_i}{2})dt + \sqrt{v_i}(\rho\sqrt{\Delta t}N_1^{(i)} + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t}N_2^{(i)})}$$

$$v_{i+1} = v_i + k(\theta - v_i)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}N_1^{(i)} + \frac{\eta^2}{4}\Delta t((N_1^{(i)})^2 - 1)$$

Tracer la courbe du Call $S_0 \mapsto V(0,S_0)^{heston}_{estime1}$: $S_0 = 0:20$ dans le modèle de Heston

- **Estimateur 2 de l'option. Reduction de la variance**
Le prix de l'option européenne avec la variance réduite est donné alors par la formule:

$$V(S_0,0)^{heston}_{estime2} = \frac{1}{2N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} (max(S_T^{(n)} - K, 0) + (max(S^{(n)}_{T_Symetrique} - K, 0))$$

Pour réduire la variance on simule les trajectoire exactement symmétriques de l'actif $S_{symetrique}$ et de la volatilité $v_{symetrique}$ de façon à utiliser des nombres aléatoires des mêmes ensembles $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ mais avec les signes inverses:

$$S_{i+1}^{sym} = S_i^{sym} e^{(r-\frac{v_i^{sym}}{2})dt + \sqrt{v_i^{sym}}(\rho\sqrt{\Delta t}(-N_1^{(i)}) + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t}(-N_2^{(i)}))}$$

$$v_{i+1}^{sym} = v_i^{sym} + k(\theta - v_i^{sym})\Delta t + \eta\sqrt{v_i^{sym}}\sqrt{\Delta t}(-N_1^{(i)}) + \frac{\eta^2}{4}\Delta t((-N_1^{(i)})^2 - 1)$$

Tracer la courbe du Call $S_0 \mapsto V(0,S_0)^{heston}_{estime2}$: $S_0 = 0:20$ dans le modèle de Heston.
Comparer les deux graphes sur une meme système de coordonnées an prenant $N_{mc} = 100$.

3. Calcule des Grecques par Monte-Carlo

Nous allons calculer les Grecques "Theta" et "Eta".

- Calcule de Grecque "Theta"

$$\frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \theta} = \frac{V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,\theta+h_1) - V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,\theta-h_1)}{2h_1}$$

Dans les deux cas: $V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,\theta+h_1)$ **et** $V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,\theta-h_1)$ **on utilise les mêmes ensembles des nombres aléatoires** $\{N_2^{(i)}{}_{(n)}\}$ **et** $\{N_1^{(i)}{}_{(n)}\}$.

Les nombres $N_1 \in \mathcal{M}_1, \quad N_2 \in \mathcal{M}_2$. En realité se sont des matrices $N \times N_{mc}$.
L'indice $i = 1 : N$ est l'indice de discrétisation temporelle.
L'indice $n = 1 : N_{mc}$ est l'indice d'un scénarios de Monte-Carlo.

On peut écrire que

$$\frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \theta} = \frac{V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,N_1,N_2,\theta+h_1) - V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,N_1,N_2,\theta-h_1)}{2h_1}$$

- Calcule de Grecque "Eta"

$$\frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \eta} = \frac{V(t=0,S_0,K,\eta+h_2)_{estime2}^{heston} - V_{estime2}^{heston}(t=0,S_0,K,\eta-h_2)}{2h_2}$$

Tracer les courbes des Grecques $K \mapsto \frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \theta}(K)$ et $K \mapsto \frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \eta}(K), \quad K \in [0,20]$

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} N_{mc} = 1000 \; ou \; 10000 \\ h_1 = h_2 = 0.1 \\ S_0 = 10 \\ K \in [0,20] \\ T = 0.5 \\ r = 0.1 \\ k = 3 \\ \rho = 0.5 \\ \theta = 0.2 \\ \eta = 0.5 \\ v_0 = 0.04 \\ \Delta t = T/100 \end{cases}$$

Partie III: Calibration du modèle de Heston

L'estimation par moindres carrés porte sur les paramètres

$$\beta_1 = \theta, \quad \beta_2 = \eta.$$

Nous allons chercher β_i pour minimiser la somme des carrés des résidus:

$$r_p = V(K_p,T_p)^{marche} - V^{heston}(K_p,T_p,\beta_i),$$

La jacobienne J_{pq} du vecteur des résidus par rapport aux inconnus β_i est une matrice $P \times 5$ dont la ligne p est

$$J_{pi}(\beta^{(k)}) = \frac{\partial r_p}{\partial \beta_i} = -\frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \beta_i}$$

où k est l'indice d'iteration.

Le problème de calibration est un problème mal posé et il a besoin d'une régularisation. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est une version regularisée de l'algorithme de Newton où la régularisation se fait par une matrice diagonale avec un coefficient λ: λD.

On applique l'Algorithme de Levenberg-Marquardt :

$$(J^T J + \lambda D)\, d^{(k)} = -J^T r^{(k)} \quad \Rightarrow \quad d^{(k)} = -(J^T J + \lambda D)^{-1} J^T r^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + d^{(k)}$$

où D est une matrice diagonale positive.

Algorithme de calibration de Levenberg-Marquardt et de moindre carré non linéaire

- Fonction à minimiser

$$\Phi(\beta_i) = \sum_{p=1}^{10} \omega_p |\, V^{marche}(K_p, T_p) - V^{heston}(K_p, T_p, \beta_i)|^2$$

  On choisit $\omega_p = 1$.

  Nous fixons 3 paramètres: $k = 3$, $v_0 = 0.04$, $\rho = 0.5$ **et nous allons calibrer 2 autres paramètres:** θ **et** η.

- Initialisation de l'algo: $T = 0.5$, $S_0 = 10, r = 0.01$ (c'est le taux d'intérêt , ne pas confondre avec le residue).

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Strike K_p	8	8.4	8.8	9.2	9.6	10	10.4	10.8	11.2
$V_p^{marche}(K_p)$	2.0944	1.7488	1.4266	1.1456	0.8919	0.7068	0.5461	0.4187	0.3166

p	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Strike K_p	11.6	12	12.4	12.8	13.2	13.6	14	14.4	14.8
$V_p^{marche}(K_p)$	0.2425	0.1860	0.1370	0.0967	0.0715	0.0547	0.0381	0.0306	0.0239

p	19	20	21
Strike K_p	15.2	15.6	16
$V_p^{marche}(K_p)$	0.0163	0.0139	0.086

- Choisir $\theta^{(0)} = 0.2$, $\eta^{(0)} = 0.5$ la tolérence $\varepsilon = 0.0001$, $\lambda = 0.01$, .
- Tant que le critère d'arret n'est pas satisfait $(\sqrt{\sum (d_i^{(k)})^2} > \varepsilon)$ faire pour chaque iteration k:
- Simuler par Monte-Carlo les prix $V(K_p, T, \beta_i^{(k)})$ (Appeler la fonction Heston)

- Calculer les résidus

$$r_p = V^{marche}(K_p, T_p) - V^{heston}(K_p, T_p, \beta_i)$$

- Pour chaque β_i calculer sa Grecque

$$\frac{\partial V_p^{heston}}{\partial \beta_i^{(k)}}$$

- Calculer le Jacobien:

$$\frac{\partial r_p^{(k)}}{\partial \beta_i^{(k)}} = -\frac{\partial V^{heston}(K_p, T_p, \beta_i)}{\partial \beta_i^{(k)}}$$

- Calculer la matrice Hessienne

$$M = (J^T J + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

- Calculer la direction de déscente

$$d = -M^{-1} J^T r$$

- Calculer

$$\beta_i^{(k+1)} = \beta_i^{(k)} + d_i^{(k)}$$

- Protection: if $\theta > 1$ ou $\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta^{(0)}$
- Protection: if $\eta > 1$ ou $\eta < 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \eta^{(0)}$
- $k = k + 1$

Quels sont les paramètres η et θ?

Partie IV^*: Smile de Volatilité

$\sigma^{implicite}(K, T)$ est une volatilité qui introduite dans la formule de BS donne comme prix celui du Call observé sur le marché.

Calibrer le modéle signifie de trouver $\sigma^{implicite}$ telle que

$$V^{BS}(S_0, t_0; K_i, T_i, r, \sigma^{implicite}) = V_i^{marche}(T_i, K_i)$$

Supposons que les prix du marché sont correctement donnés par le modèle de Heston:

$$V_i^{marche}(T_i, K_i) = V_i^{heston}(T_i, K_i)$$

A chaque couple (T_i, K_i) correspond une volatilité implicite $\sigma_i^{implicite}$
Pour calculer $\sigma_i^{implicite}$ on applique l'algorithme de Newton: on cherche le zero d'une fonction

$$F = V^{BS}(T_i, K_i, \sigma_i^{implicite}) - V_i^{heston}(T_i, K_i)$$

On simplifie les notations et pour chaque K_i on a

$$F(\sigma) = V^{BS}(\sigma) - V^{heston}$$

$V^{BS}(\sigma)$ est le prix théorique de l'option Call en $t = 0$.

$$V^{BS}(S_0, 0) = S_0 N(d_1(S_0, 0)) - Ke^{-rT} N(d_2(S_0, 0))$$

$$d_1(S_0, 0) = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2(S_0, 0) = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

On Matlab il y a la fonction $erf(x)$ qui est liée avec la fonction de répartition $N(x)$ de la loi Normale par la formule suivante:

$function[g] = N(x)$
$g = \frac{1}{2}(1 + erf(\frac{x}{\sqrt{2}}))$
end

L'algorithme de Newton est itératif et permet de trouver les zeros de la fonction F:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{F(\sigma_n)}{F'(\sigma_n)}$$

$$F'(\sigma) = \frac{\partial V^{BS}}{\partial \sigma} = S_0\sqrt{\frac{T}{2\pi}}e^{\frac{-d_1^2}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma^{implicite}(K_i)$$

Avant de commencer le calcul, vérifiez que le prix tombe bien dans lintérvalle définie par les contraintes d'arbitrage:

$$max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) < V^{heston} < S_0.$$

Si no la solution n'existe pas.
Pour le point du départ utiliser

$$\sigma_0 = \sqrt{2|\frac{ln(S_0/K) + rT}{T}|}$$

Travail à faire

1. Programmez séparement les fonctions: d_1, d_2, Call théorique $V^{BS}(S_0, T, K, r, \sigma)$,$\frac{\partial V^{BS}}{\partial \sigma}$.

2. On fixe T. Pour chaque strike

$$K_i = 5 : 0.5 : 20$$

calculez par Monté Carlo les prix de Heston: $V_i^{heston}(T, K_i)$

Il y a un moment délicat ici. Pour chaque K_i (surtout pour les valeurs petites) calculez $V_i^{heston}(T, K_i)$, vérifiez s'il suit la règle d'arbitrage et puis **le gardez pendant le déroulement**

d'algorithme de Newton (n'appelez pas à l'intérieur d'algo de Newton la fonction qui calcule le V_i^{heston}.) . Si le prix $V_i^{heston}(T, K_i)$ ne satisfait à la règle d'arbitrage simulez un autre, faite la vérification. Si il est bon injectez ce prix dans l'algorithme de NEWTON et trouvez la volatilité implicite qui correspond à strike K_i.

3. Pour chaque strike K_i calculez la volatilité implicite $\sigma_i^{implicite}$ et présentez le graphe

$$K_i \to \sigma_i^{implicite}$$

Utilisez les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} N_{mc} = 1000 \ ou \ 10000 \\ L = 20 \\ S_0 = 10 \\ K = 10 \\ T = 0.5 \\ r = 0.1 \\ k = 0.3 \\ \rho = 0.7 \\ \theta = 0.3 \\ \eta = 0.4 \\ v_0 = 0.03 \\ \Delta t = T/100 \end{cases}$$

(Donnés de J. Gatheral dans le livre "Volatility Surface".

$$\begin{cases} N_{mc} = 1000 \\ L = 20 \\ T = 0.5 \\ r = 0.1 \\ k = 1.32 \\ \rho = -0.7 \\ \theta = 0.04 \\ \eta = 0.4 \\ v_0 = 0.02 \end{cases}$$